UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS I (MA-1111)
Trimestre Enero-Marzo 2020

Elaborado por
Miguel Labrador
12-10423
Ing. Electrónica

Respuesta Primer Parcial Enero-Marzo 2020

Pregunta 1. (6 pts c/u) Encunetre todos los valores de $x \in R$ tales que

$$\frac{x^2 + |2 - 3x|}{x^2 + x - 12} \leq 1$$

Solución 1: Podemos aplicar la definición de valor aboluto.

$$|2-3x| = \begin{cases} 2-3x & , \text{si } x \geq 0 \\ -(2-3x) & , \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2-3x & , \text{si } x \leq \frac{2}{3} \\ -(2-3x) & , \text{si } x > \frac{2}{3} \end{cases}$$

Caso 1: Si $x \in (-\infty, \dfrac{2}{3})$

Entonces $\dfrac{x^2 + (2-3x)}{x^2 + x - 12} \leq 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2 + (2-3x) - (x^2 + x - 12)}{x^2 + x - 12} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x + 14}{x^2 + x - 12} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{-4x + 14}{(x+4)(x-3)} \leq 0$

Puntos de interés: $-4, 3, \dfrac{14}{4} = \dfrac{7}{2}$

Hacemos un análisis de signos:

	$(-\infty, -4)$	$(-4, 3)$	$(3, \frac{7}{2})$	$[\frac{7}{2}, +\infty)$
$-4x + 14$	$+$	$+$	$-$	$+$
$x + 4$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x - 3$	$-$	$+$	$+$	$-$
	$+$	$-$	$+$	$-$

El conjunto solución del caso 1 es:

$(-4, 3) \bigcup [\dfrac{7}{2}, +\infty) \bigcap (-\infty, \dfrac{2}{3}]$

$Sol_1 = (-4, \frac{2}{3}]$

Caso 2: Si $x \in (\frac{2}{3}, +\infty)$

$$\frac{x^2-(2-3x)}{x^2+x-12} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-2}{x^2+x-12} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x-2-(x^2+x-12)}{x^2+x-12} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+10}{x^2+x-12}$$
$$\Leftrightarrow 0 \Leftrightarrow \frac{2(x+5)}{x^2+x-12} \leq 0 \frac{2(x+5)}{(x+4)(x-3)} \leq 0$$

Puntos de interés: $-5, -4, 3$

Hacemos análisis de signos:

	$(-\infty, -5)$	$[-5, -4)$	$(-4, -3)$	$(3, +\infty)$
$x+5$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$+$	$-$
	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución del caso 2 está dada por:

$(-\infty, -5] \bigcup (-4, -3) \bigcap (\frac{2}{3}, +\infty)$

$Sol_2 = (\frac{2}{3}, 3)$

Finalmente, la solución está dada por:

$Sol_f = Sol_1 \bigcup Sol_2 = (-4, \frac{2}{3}] \bigcup (\frac{2}{3}, 3) = (-4, 3)$

Pregunta 2.(5 pts)Halle el dominio de la fución

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+7}{1-|x+2|}}$$

Solucion 2. Para que f esté definida: $\dfrac{x^2-3x+7}{1-|x+2|} \geq 0$

Resolvemos esta desigualdad. Note que el polinomio en el numerador no es factorizable ya que al inspeccionar su discriminante se ve que: $b^2-4ac = (-3)^2-4(1)(7) = 9-28 < 0$. Además como $a = 1 > 0$ entonces $x^2-3x+7 > 0 \ \forall x \in R$. Por lo tanto, para que $\dfrac{x^2-3x+7}{1-|x+2|} \geqslant 0$ se debe cumplir que $1-|x+2| > 0$ lo cual es más sencilla de resolver.

$1-|x+2|>0 \Leftrightarrow |x+2|<1 \Leftrightarrow -1<x+2<1 \Leftrightarrow -3<x<-1 \Leftrightarrow x \in (-3,-1).$

finalmente, el dominio de f está dado por: $Domf = (-3,-1)$

Pregunta 3(9 pts) Dadas las funciones $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ y $g(x)=\begin{cases} x+3 & \text{, si } x>2 \\ 1-x & \text{, si} x<-2 \end{cases}$

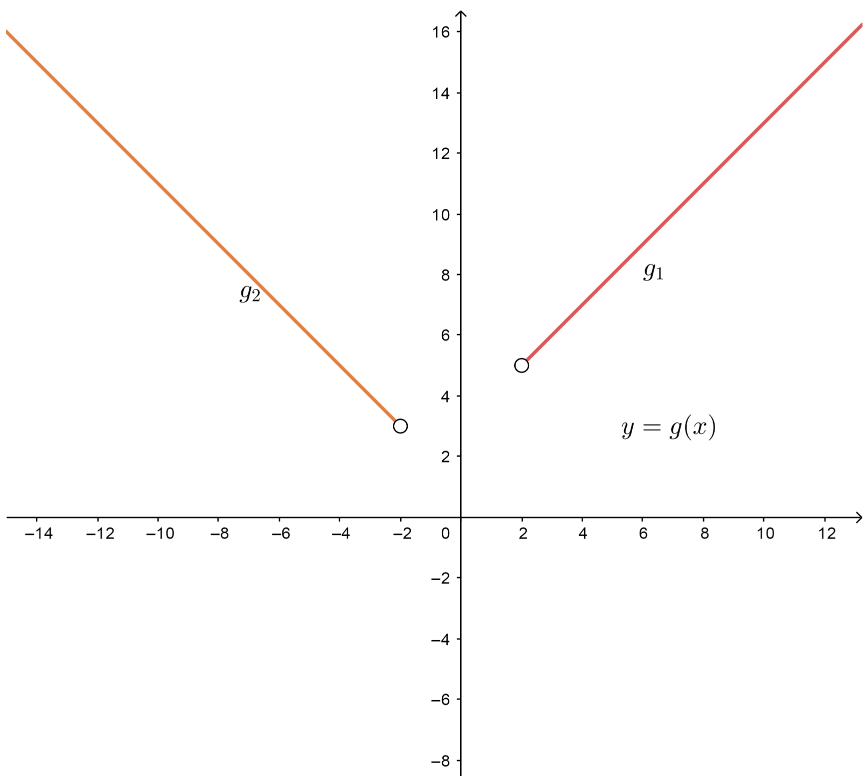
a) Haga un bosquejo del gráfico de la funcion g y determine su rango.

b) Determine el dominio tanto de f como de g.

c) Determine f o g.

d) Determine el dominio de f o g.

Solucion 3.



a) $g_1(x)=x+3$ Si x >2

$g_2(x)=1-x$ Si x <-2

Del gráfico se ve que $\text{Ran}g=(3,+\infty)$

b) $Domg = (-\infty, -2)U(2, +\infty)$

Para $Domf$, garantizamos que $x^2 - 4 \geqslant 0$

$x^2 - 4 \geq 0 \leftrightarrow x^2 \geq 4 \leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{2^2} \leftrightarrow |x| \geq 2 \leftrightarrow x \geq 2$ ó $x \leq -2$

c)$gof = g(f(x))$ si $Ranf \in Domg$

$$g(f(x)) = \begin{cases} f(x) + 3 & \text{, si } f(x) > 2x \in Domf \\ 1 - f(x) & \text{, si } f(x) < -2x \in Domf \end{cases}$$

Resolvemos: $f(x) > 2$ y $x \in Domf \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} > 2$ y $(-\infty, 2] \bigcup [2, +\infty)$

$\sqrt{x^2 - 4} > 2 \Leftrightarrow x^2 - 4 > 4 \Leftrightarrow x^2 > 8 \Leftrightarrow |x| > \sqrt{8} \Leftrightarrow x > \sqrt{8}$ó$x < -\sqrt{8} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{8}) \bigcup (\sqrt{8}, +\infty)$. Por lo tanto nos queda:

$f(x) > 2$ y $x \in Domf \Leftrightarrow x \in (-\infty, \sqrt{8}) \bigcup (\sqrt{8}, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\sqrt{8}) \bigcup (\sqrt{8}, +\infty)$

Resolvemos: $f(x) < -2$ y $x \in Domf \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} < -2$ y $x \in (-\infty, -2] \bigcup [2, \infty)$

$\sqrt{x^2 - 4} < -2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Luego $f(x) < -2$ y $x \in Domf \Leftrightarrow x \in \varnothing$

$$g(f(x)) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} + 3 & \text{, si } x \in (-\infty, -\sqrt{8}) \bigcup (\sqrt{8}, \infty) \\ 1 - \sqrt{x^2 - 4} & \text{, si } x \in \varnothing \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} + 3 & \text{, si } x \in |x| > \sqrt{8} \end{cases}$$

d) $Domgof = (-\infty, -\sqrt{8}) \bigcup (\sqrt{8}, +\infty)$

Pregunta 4.(10 pts) Halle los vértices del cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados y que circunscribe a la circunferencia de ecuacion $x^2+y^2-6x-10y+25 = 0$. Luego, halle los vértices del cuadrado cuyos lados también son paralelos a los ejes coordenados pero que está inscrito en dicha circunferencia.

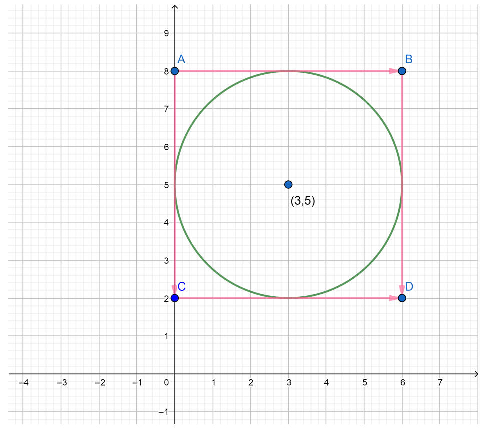
Soluión 4. Circunferencia $C_1 = x^2 - 6x + y^2 - 10y + 25 = 0$

a) Hallar el cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes cartesianos y circunscribe a la circunferencia C_1.

$C_1 : x^2 - 6x + y^2 - 10y = -25$ completamos cuadrados:

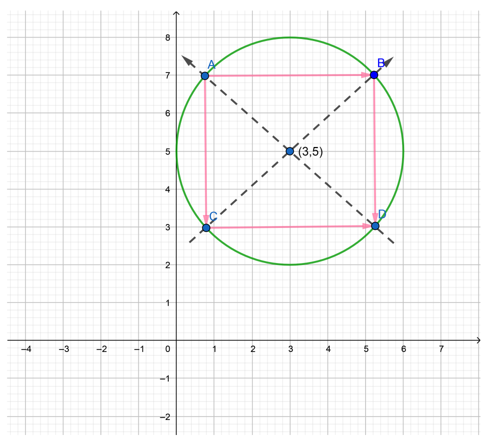
$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 10y + 25) = -25 + 9 + 25$

$(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 9 \rightarrow$ circunferencia con centro en (3,5)y radio 3.



Por inspección se puede ver que los vértices son: A(0,8) B(6,8) C(0,2) D(6,2)

b) Hallar los vértices del cuadrado cuyor lados son paralelos a los ejes cartesianos y está inscrito en la circunferencia.



Para encontrar B´ puede trazarse una recta, L_1, que pase por B´, por el centro y por lo tanto por C´.

Vea que esta recta debe tener pendiente $m_1 = 1$ (una recta que esté sobre la diagonal de un cuadrado cuyos lados son paralelos a los ejes debe tener pendiente 1 ó -1)

la ecuación de la recta está dada por:

$y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 5 = (1)(x - 3) \rightarrow y = x + 2 : L_1$

Note que B´y C´son los puntos de interseción entre la circunferencia C_1 y la recta L_1. Resolvemos el sístema

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-5)^2 = 9 & (i) \\ y = x + 2 & (ii) \end{cases}$$

Por sustitución: $(ii) \rightarrow (i)$

$(x-3)^2 + (x-3)^2 = 9 \rightarrow 2(x-3)^2 = 9 \rightarrow (x-3)^2 = \frac{9}{2} \rightarrow |x-3| = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$x - 3 = -\frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow x_1 = 3 + \frac{3}{\sqrt{2}}$

$x - 3 = \frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow x_2 = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}}$

Reemplazando $x \rightarrow (ii)$:

$Y_1 = 5 + \frac{3}{\sqrt{2}}$

$Y_2 = 5 - \frac{3}{\sqrt{2}}$

Por lo tanto las coordenadas de B´y C´ son:

B´$(3 + \frac{3}{\sqrt{2}}, 5 + \frac{3}{\sqrt{2}})$ y C´$(3 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 5 - \frac{3}{\sqrt{2}})$.

Para A´y D´ hacemos igual. Hallemos L_2,que tendrá $m_2 = -1$, por lo tanto: $L_2 : y - 5 = (-1)(x-3) \rightarrow y - 5 = -(x-3) \rightarrow Y = -x + 8.(i)$ sustituyendo (i) en C_1, nos queda: $(x-3)^2 + (-x+3)^2 = 9 \rightarrow (x-3)^2 + (x-3)^2 = 9 \rightarrow 2(x-3)^2 = 9$

$x_1 = 3 + \frac{3}{\sqrt{2}}$

$x_2 = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}}$

Reemplazando $x \rightarrow (i)$ nos queda:

$Y_1 = -3 - \frac{3}{\sqrt{2}} + 3 = 5 - \frac{3}{\sqrt{2}}$

$Y_2 = -3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + 8 = 5 + \frac{3}{\sqrt{2}}$

Finalmente tenemos A´$(3 - \frac{3}{\sqrt{2}}, 5 + \frac{3}{\sqrt{2}})$ y D´$(3 + \frac{3}{\sqrt{2}}, 5 - \frac{3}{\sqrt{2}})$

Este parcial fue resuelto por Miguel Labrador y digitalizado por Keily Colmenares.

Keily Colmenares
18-10208
Arquitectura
Twitter: @Colmenareskei

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com